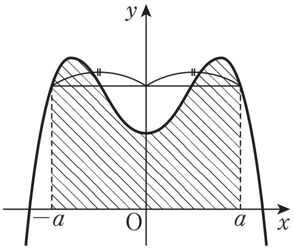
PART4 偶関数・奇関数の定積分

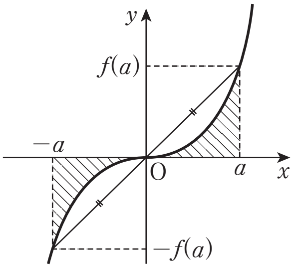
要点整理と公式

要点 ① 偶関数・奇関数の定積分

$f(x)=x^2$, $f(x)=\cos x$ のように，
$f(-x)=f(x)$ が常に成り立つとき，
$f(x)$ は「　　　　」という。偶関数の
グラフは「　　　」に関して対称である。



$f(x)=x^3$, $f(x)=\sin x$ のように，
$f(-x)=-f(x)$ が常に成り立つとき，
$f(x)$ は「　　　　」という。奇関数の
グラフは「　　　」に関して対称である。



偶関数，奇関数の定積分について，次のことが成り立つ。

偶関数・奇関数の定積分

$f(x)$ が偶関数のとき $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

$f(x)$ が奇関数のとき $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

（証明）

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$$

$\int_{-a}^{0} f(x)dx$ において，$x=-t$ とおくと $dx=(-1)dt$

x	$-a \to 0$
t	$a \to 0$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_a^0 f(-t)(-1)dt=\int_0^a f(-t)dt=\int_0^a f(-\quad)d$$

よって $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_0^a \{f(-x)+f(x)\}dx$ より

$f(x)$ が偶関数ならば $f(-x)=f(x)$ より $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

$f(x)$ が奇関数ならば $f(-x)=-f(x)$ より $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

(ex)

$$\int_{-1}^{1}(5x^4-4x^3+3x^2-2x+1)dx = 2\int^{1}(5x^4+3x^2+1)dx = 2\left[x^5+x^3+x\right]_0^1 = 6$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2-2)^2\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (e^x-e^{-x})\,dx$　(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

Point Pickup

偶関数・奇関数の定積分

$f(x)$ が偶関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$f(x)$ が奇関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

(偶関数) × (偶関数) ＝ (偶関数)

(偶関数) × (奇関数) ＝ (奇関数)

(奇関数) × (奇関数) ＝ (偶関数)

第17講 PART4 確認問題

次の定積分を求めよ。

ただし，答えは下の選択肢のうちから選べ。

1 $\int_{-2}^{2} x^3(3x^2-4)dx$

$x^3(3x^2-4)$ は ア であるから，

$$\int_{-2}^{2} x^3(3x^2-4)dx = \boxed{イ}$$

[ア の選択肢]

① 偶関数　　② 奇関数

[イ の選択肢]

① 0　　② 8

③ 16　　④ 32

2 $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$x\sqrt{1-x^2}$ は ウ であるから，

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = \boxed{エ}$$

[ウ の選択肢]

① 偶関数　　② 奇関数

[エ の選択肢]

① 0　　② 1

③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{\pi}{2}$

3 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx$

$\cos^2 x$ は [オ] であるから，

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx = \boxed{カ}$$

$$= \boxed{キ}$$

[[オ] の選択肢]

① 偶関数　　② 奇関数

[[カ] の選択肢]

① $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx$　　② $2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx$

③ $2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx$　　④ $-2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx$

[[キ] の選択肢]

① $\frac{2}{3}\pi$　　② $\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}$

③ $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$　　④ $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{12}$

[MEMO]

PART4 偶関数・奇関数の定積分

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2-2)^2\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (e^x-e^{-x})dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

[解答]

(1) $f(x)=x(x^2-2)^2$ とおくと，$f(-x)=-x(x^2-2)^2=-f(x)$ より

$f(x)$ は奇関数であるから

$$\int_{-1}^{1} x(x^2-2)^2\,dx=0$$

(2) $f(x)=e^x-e^{-x}$ とおくと，$f(-x)=e^{-x}-e^x=-(e^x-e^{-x})=-f(x)$ より

$f(x)$ は奇関数であるから

$$\int_{-2}^{2} (e^x-e^{-x})dx=0$$

(3) $\sin x$ は奇関数より，$\sin^2 x$ は偶関数

よって，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

第17講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②，イ：①

[解説]

$f(x)=x^3(3x^2-4)$ とおくと，

$$f(-x)=-x^3(3x^2-4)=-f(x) \quad \text{[A]}$$

より，$f(x)$ は**奇関数**である。

$$\int_{-2}^{2} x^3(3x^2-4)dx=\mathbf{0} \quad \text{[B]}$$

[A]　$f(-x)=-f(x)$
$\iff$ $f(x)$ は奇関数

[B]　$f(x)$ が奇関数のとき，
$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

2　**[正解]** ウ：②，エ：①

[解説]

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ とおくと，

$$f(-x)=-x\sqrt{1-x^2}=-f(x) \quad \text{[C]}$$

より，$f(x)$ は**奇関数**である。

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx=\mathbf{0} \quad \text{[D]}$$

[C]　$f(-x)=-f(x)$
$\iff$ $f(x)$ は奇関数

[D]　$f(x)$ が奇関数のとき，
$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

3 **[正解]** オ：①，カ：②，キ：③

[解説]

$f(x)=\cos^2 x$ とおくと，

$$f(-x)=\cos^2(-x)=\cos^2 x=f(x) \quad \text{[E]}$$

より，$f(x)$ は**偶関数**である。

よって，

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x dx=\boldsymbol{2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x dx} \quad \text{[F]}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2x)dx$$

$$=\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

[E] $f(-x)=f(x)$
$\Longleftrightarrow$ $f(x)$ は偶関数

[F] $f(x)$ が偶関数のとき，
$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^{a}f(x)dx$